

第四讲：动态优化（连续时间， 之一）

这里是最自由的课堂。既无迟到，更无早退一说。可以大声喧哗，可以戚戚私语。但起码我们将互相尊重。

第四讲：动态优化（连续时间）

明尼苏达大学的学生通常擅长于离散时间模型，而芝加哥大学的学生则倾向于连续时间模型。当然这也不绝对。我的论文一般使用连续时间，应为其表达式干净漂亮。但在和恒甫合作的一篇文章里 (Journal of Monetary Economics, 1998), 我们用的是离散时间。

离散时间的优点是比较直观，而且如果要想将理论联系实际的话，离散时间更方便，因为绝大部分数据是离散的，比如通货膨胀率，经济增长率等都只有 monthly or quarterly data.

离散时间模型最后将导致一系列差分方程组：比如在吃蛋糕的问题中，我们有：

$$k_{t+1} = k_t - c_t$$

$$c_{t+1} = \beta c_t$$

$$\text{with } k_0 = 1, k_{T+1} = 0.$$

这个差分方程组很好解。但在一般情形下差分方程看上去会很乱。当然如果我们只在乎数值解，则离散时间是很合适的。

对理论家而言，连续时间模型可能更方便。最终要解的是微分方程组。微分方程看上去比较 neat. 不少同学可能很害怕微分方程，我在这里给大家先打点基础。

让 $\dot{x}$ 代表 $x(t)$ 关于时间的导数，即：

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

既然号称是张尧庭的学生，我就先从最简单的讲起。

首先，注意到： if $x(t) = e^{gt}$, then $\dot{x} = gx$. Namely, the growth rate of x , denoted by $\frac{\dot{x}}{x}$, is g .

那么，微分方程 $\dot{x} = gx$ 的解是什么呢？答案是： $x(t) = x(0)e^{gt}$. 注意不要忘掉 $x(0)$.

请问怎样解 $\dot{x} = gx + b$ where g and b are constant?

只要注意到上述方程等同于: $(x + b/g)' = g(x + b/g)$ 就知道:

$$x(t) + b/g = (x(0) + b/g)e^{gt}$$

另外, 希望大家记住下面的一些有关增长率的公式, 可大大加快你的运算速度。

$$\text{If } x(t) = y(t)z(t), \text{ then } \frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{z}}{z}$$

$$\text{推论: If } x(t) = y(t)^2, \text{ then } \frac{\dot{x}}{x} = 2\frac{\dot{y}}{y}$$

而且你可以验证: If $x(t) = y(t)^\alpha$, then $\frac{\dot{x}}{x} = \alpha\frac{\dot{y}}{y}$ for any parameter α .

我想我们已经准备的差不多了。下面讲**动态优化（连续时间 and Infinite Horizon）**。

最简单的情形: one control variable (x) and one state variable (z).

第一步: 将问题标准化如下

$$(4.1) \text{ Max } \int_0^\infty U(x)e^{-\rho t} dt$$

$$(4.2) \text{ Subject to: } \dot{z} = g(x; z)$$

$$(4.3) f(x; z) \geq 0 \text{ with } z(0) \text{ given.}$$

这里, z 是状态变量, 限制条件(4.2)描述 z 怎样随时间变化。一旦控制变量 x 的路径决定了, 那么 z 的路径也就确定了; 反之亦然。

$e^{-\rho t}$ 的含义和离散情形下的 β^t 是一样的。 β 称为 discount factor; ρ 称为 the rate of time preference.

第二步: 写出 Hamiltonian:

$$H = U(x) + \lambda f(x; z) + \mu g(x; z)$$

这里, λ 是限制条件(4.3) 带来的拉格朗日乘子, 无 (4.3) 则无 λ 项。 μ 称为状态方程 (4.2) 的 co-state variable.

注意在写 Hamiltonian 时(4.2)的左边 $\dot{z}$ 并不出现。下一讲我会形式上指点一下 Hamiltonian 的来历以及其和 Lagrangian 的联系。在这里, 请先“生搬硬套”。“生搬

硬套”是学习的次低境界（恐怕比“囫囵吞枣”好点）。但它不失为一条捷径。只是我们不能停留在这种境界。

第三步：导出一阶条件：

$$(4.5) \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$(4.6) \quad \dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H}{\partial z}$$

第四步：列出 complementary slackness conditions （如有限制条件（4.2）的话）：

$$(4.7) \quad \lambda \geq 0, \lambda f(x) = 0$$

第五步：加上 TVC:

$$(4.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu z e^{-\rho t} = 0$$

第六步：解上述微分方程组合不等式，注意运用初始条件和 TVC.

[评论] 一般来说，优化问题很少会有显示解。这时候，我们可以先计算 steady state if one exists. 然后作一局部线性逼近算出局部最优路径。当问题能归结于二维微分方程时，可以通过 phase diagram 来对最优路径作定性描述（如能指点如何将文字与图放在同一篇博客中，不胜感谢）。

先看有显示解的问题。

[例题：吃蛋糕]

$$\begin{aligned} &\text{Max } \int_0^\infty \ln c_t e^{-\rho t} dt \\ &\text{subject to: } \dot{k} = -c, \text{ with } k_0 = 1 \end{aligned}$$

Hamiltonian:

$$H = \ln c + \mu(-c)$$

FOCs

$$\begin{aligned} (1/c) - \mu &= 0 \\ \dot{\mu} &= \rho\mu \end{aligned}$$

列出 complementary slackness conditions: 无。

TVC:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu k e^{-\rho t} = 0$$

求解最优消费计划。把这作为习题。注意要明确使用 TVC. 答案: $c_t = \rho e^{-\rho t}$, for $t \geq 0$.

请将作业以 PDF 形式寄: **danyang.xie@gmail.com**